

基于圆心约束最小二乘圆拟合的短圆弧测量

朱 嘉,李醒飞,谭文斌,向红标,陈 诚

(天津大学 精密测试技术及仪器国家重点实验室,天津 300072)

摘要:坐标测量中通常采用最小二乘法拟合几何元素。测量短圆弧时,由于特征点数少,受到的噪声干扰大,测量精度难以满足测量要求。本文针对短圆弧测量,分析了采用最小二乘法多点测圆时,圆弧中心角对圆心及半径测量误差的影响;考虑到短圆弧的功能特性和加工工艺往往将圆心作为固定值,在最小二乘圆拟合的基础上,提出了圆心约束最小二乘圆拟合方法。利用提出的方法测量了理论半径为 10 mm,中心角为 20°的短圆弧,测量误差 <0.01 mm。对比实验表明,利用圆心约束最小二乘圆拟合法测量短圆弧能有效提高拟合精度。提出的方法基于机器视觉检测系统,能对工件做在线非接触测量。与传统的短圆弧测量方法相比,具有精度高、速度快、测量范围广等优势。

关键词:最小二乘法;短圆弧;半径测量

中图分类号:TG83;TP391;TH721 **文献标识码:**A

Measurement of short arc based on centre constraint least-square circle fitting

ZHU Jia, LI Xing-fei, TAN Wen-bin, XIANG Hong-biao, CHEN Cheng

(State Key laboratory of Precise Measurement Technology & Instrument, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The least-square method is usually adopted for fitting of geometric elements in a coordinate measurement. However, in the process of short arc measurement, it is difficult to offer a high precision due to the lack of feature points and the influence of noise jamming. Aimed at the measurement of short arc, this paper analyzes the influence of central angles on measurement errors of circle centre and radius by using the least-square method. Based on the fact that the circle center of the short arc is often set in a fixed position due to its functional property and processing technology, a centre constraint least-square circle fitting method is proposed in the study. It is proved that the measurement error is less than 0.01 mm by using the proposed method to measure a short arc with a central angle of 20° and a radius of 10 mm. A comparative experiment shows that the centre constraint least-square method can improve the accuracy of circle fitting efficiently in the short arc measurement. As the proposed method is based on machine vision system, it has advantages of high accuracy, fast speed, wide measuring ranges and on-line and non-contact measurement as compared with traditional measurement methods of short arc.

Key words: least-square method; short arc; radius measurement

1 引 言

短圆弧是指 30° 以下中心角所对的圆弧^[1]。常用的非完整圆弧半径测量方法包括圆弧样板法、卡尺法、弓高弦长法等,这些方法的精度、量程、特点和应用场合各不相同^[2]。圆弧样板法仅用于检验圆弧半径是否在公差带范围内;卡尺法适用于精度要求不高的场合,测量范围受弧长的限制,卡尺量程受横向定位架的限制;而弓高弦长法的操作比较繁琐。上述方法一般只用于对工件做静态的离线测量。

短圆弧测量的难点在于圆弧上的特征点少数,受到的噪声干扰大。考虑到短圆弧的功能特性和加工工艺都是将圆心设为固定值^[1],因此,本文在最小二乘圆拟合的基础上,引入圆心约束条件,用来约束圆的拟合过程。本文方法基于机器视觉检测系统,能够对短圆弧做在线非接触测量,与前述传统测量方法相比,具有速度快、精度高、测量范围大等优点,为短圆弧测量提供了一种有效的解决方案。

2 测量机模型及机器视觉系统

图 1 为立柱移动型三坐标测量机。立柱做 X 向移动,滑座沿立柱做 Z 向移动,回转体工件固定在分度台上并随之转动,回转轴与 Z 向平行。照明装置和 CCD 摄像装置构成测量机的机器视觉系统。

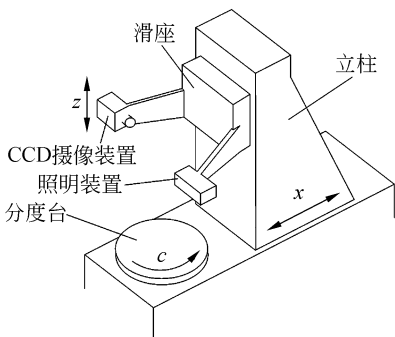


图 1 测量机模型

Fig. 1 Coordinate model of measuring machine

机器视觉系统的工作原理是:照明装置投射稳定且均匀的结构光平面并与回转体工件表面相

交,CCD 摄像装置获取表征被测工件表面轮廓的高对比度二维图像,利用标定后^[3]图像坐标和仪器坐标的对应关系,得到仪器坐标系下二维坐标点组成的工件表面轮廓线。

利用测量机测量如图 2 所示的回转体工件。图中,圆弧 B 的中心角接近 180° ;而圆弧 A 和圆弧 C 的中心角均小于 30° 属于短圆弧的范畴。用常用的最小二乘圆拟合法评价圆弧时,圆心及半径的测量不确定度随着圆弧中心角的减小而增大,下面以短圆弧 A 的半径测量为例说明。

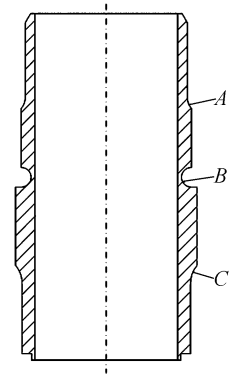


图 2 回转体工件截面图

Fig. 2 Sectional view of rotational workpiece

3 最小二乘圆拟合法及问题的提出

如图 3 所示,工件轮廓由线段 MA, BN 和圆弧 AB 组成,圆弧半径 R 为待测的特征参数。用最小二乘法确定被测要素的基本原理是:假设有理想圆的圆心 $O(x_0, z_0)$,使得圆弧上的离散采样点 (x_i, z_i) 到 $O(x_0, z_0)$ 距离的平方和最小,则该理想圆的半径 R 即为所要求的圆弧半径。

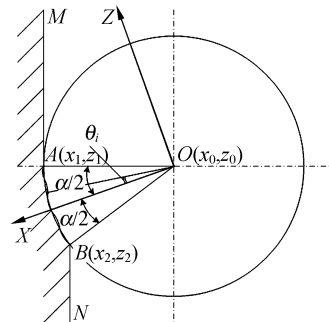


图 3 短圆弧拟合

Fig. 3 Short arc fitting

目标函数表示为：

$$F(x_0, z_0, R) =$$

$$\sum_{i=1}^N (\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2} - R)^2 = \min. \quad (1)$$

式中 N 为参与拟合计算的特征点的个数。这是

$$x_0 = \frac{\left(Q - \frac{T^2}{N}\right)\left(W + V - \frac{P + QS}{N}\right) - \left(H - \frac{ST}{N}\right)\left(Z + U - \frac{P + QT}{N}\right)}{2\left(P - \frac{S^2}{N}\right)\left(Q - \frac{S^2}{N}\right) - 2\left(H - \frac{ST}{N}\right)^2}, \quad (3)$$

$$z_0 = \frac{\left(P - \frac{S^2}{N}\right)\left(Z + U - \frac{P + QT}{N}\right) - \left(H - \frac{ST}{N}\right)\left(W + V - \frac{P + QS}{N}\right)}{2\left(P - \frac{S^2}{N}\right)\left(Q - \frac{S^2}{N}\right) - 2\left(H - \frac{ST}{N}\right)^2}, \quad (4)$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + z_0^2 - \frac{2Sx_0}{N} - \frac{2Tz_0}{N} + \frac{P + Q}{N}}. \quad (5)$$

式中, $S = \sum_{i=1}^N x_i, T = \sum_{i=1}^N z_i, H = \sum_{i=1}^N x_i z_i, P = \sum_{i=1}^N x_i^2, Q = \sum_{i=1}^N z_i^2, U = \sum_{i=1}^N x_i^2 z_i, V = \sum_{i=1}^N x_i z_i^2, W = \sum_{i=1}^N x_i^3, Z = \sum_{i=1}^N z_i^3.$

一个非线性最小二乘问题,当 $O(x_0, z_0)$ 在坐标原点附近时,常以下式代替:

$$F'(x_0, z_0, R) = \sum_{i=1}^N (R^2 - (x_i - x_0)^2 - (z_i - z_0)^2) = \min. \quad (2)$$

计算得到:

选取 N 个特征点服从均匀分布^[4], 设单次测量误差为 Δ , 在测量机的几何误差已获补偿时, 可以认为 Δ 为随机误差。为不失一般性, 以 $O(x_0, z_0)$ 为原点建立坐标系, 使 N 个特征点关于 X 轴对称分布。此时, $T = H = U = Z = 0$, 使(3)、(4)、(5)式得到简化。计算得到圆心及半径的测量不确定度 δ_o, δ_R :

$$\delta_o = 2 \sqrt{\frac{N - \left(\sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right)^2 / N}{\left(N - \sum_{i=1}^N \cos 2\theta_i\right) \left[N + \sum_{i=1}^N \cos 2\theta_i - 2\left(\sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right)^2 / N\right]} \Delta}, \quad (6)$$

$$\delta_R = \sqrt{\frac{N + \sum_{i=1}^N \cos 2\theta_i}{N \left[N + \sum_{i=1}^N \cos 2\theta_i - 2\left(\sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right)^2 / N\right]} \Delta}. \quad (7)$$

式中, θ_i 为特征点 (x_i, z_i) 与原点 $O(x_0, z_0)$ 的连线同 X 轴的夹角。圆心及半径的测量不确定度 δ_o, δ_R 与中心角 α 和采样点数 N 的关系如图 4 所示。

可见, 当中心角 α 较小时, 如 $\alpha < 30^\circ$ 时, 圆弧圆心及半径的测量误差的传递因数 $\delta_o/\Delta, \delta_R/\Delta$ 将随中心角 α 的减小而迅速增大。

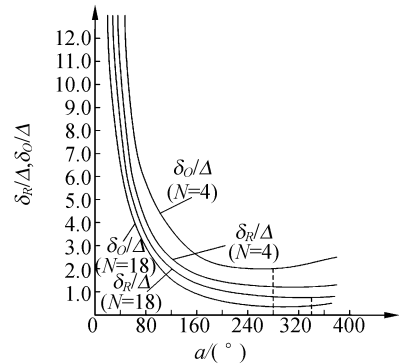


图 4 圆心及半径的测量不确定度与中心角和采样点数的关系

Fig. 4 Influence of central angle and sampling numbers on measurement uncertainties of circle centre and radius

4 圆心约束的最小二乘圆拟合法

针对短圆弧测量的带约束条件的最小二乘圆拟合法的思路^[5-7]是:从工件图纸及从短圆弧的使用功能特性或加工工艺出发,将短圆弧的理论圆心位置或理论半径作为约束条件,约束最小二乘圆的拟合,提高拟合精度。

仍以图 2 所示的短圆弧 A 的半径测量为例。首先对 CCD 摄像装置获取的测量图像做二值化、边缘提取和轮廓跟踪处理,结果如图 5 所示。

将表征工件轮廓的像素点进一步细分,并根据预先标定的线性变换参数和图像畸变矫正参数计算得到轮廓线上各特征点在仪器坐标系下的二维坐标,结果如图 6 所示。

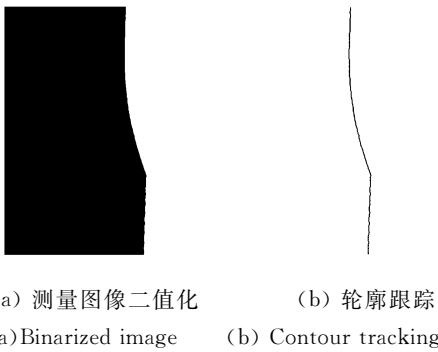


图 5 测量图像的二值化和轮廓跟踪处理
Fig. 5 Binary and contour tracking process of measuring image

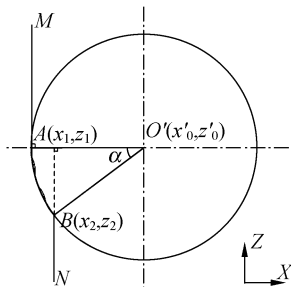


图 6 理论圆心 O' 的求取
Fig. 6 Calculating theoretical circle center O'

设短圆弧 AB 的理论圆心为 $O'(x'_0, z'_0)$, 线段 MA 与理论圆 O' 相切, 切点为 $A(x_1, z_1)$ 。由几何关系得理论圆心 $O'(x'_0, z'_0)$:

$$\begin{cases} x'_0 = x_1 + R \\ z'_0 = z_2 + \sqrt{R^2 - (R - (x_2 - x_1))^2} \end{cases} \quad (8)$$

可见,圆弧端点 A, B 的坐标值 x_1, x_2, z_2 是确定约束条件的参数,可以通过拟合线段 MA, BN 计算得到。

以斜截式方程表达直线时,直线倾角较小时拟合精度较高^[8],仪器坐标系下线段 MA 和 BN 的倾角接近 90° ,因此,置换 X, Z 坐标,设 MA 和 BN 的表达式分别为

$$x = K_{x,z} \cdot z + B_{x,z}, x = K_{x,z}' \cdot z + B_{x,z}' \quad (9)$$

此时,点 A, B 的 X 坐标值 $x_1 = B_{x,z}, x_2 = B_{x,z}'$ 。由最小二乘原理^[9-10]知,目标函数为

$$F(K_{x,z}, B_{x,z}) = \sum_{i=1}^m (x_i^0 - K_{x,z} \cdot z_i - B_{x,z})^2 \quad (10)$$

根据极值原理,要使目标函数值最小,有:

$$\frac{\partial F}{\partial K_{x,z}} = 0, \frac{\partial F}{\partial B_{x,z}} = 0 \quad (11)$$

解上述两方程,得直线参数:

$$\begin{cases} K_{x,z} = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i^0 z_i - \sum_{i=1}^m x_i^0 \cdot \sum_{i=1}^m z_i}{m \sum_{i=1}^m z_i^2 - (\sum_{i=1}^m z_i)^2} \\ B_{x,z} = \frac{\sum_{i=1}^m z_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m x_i^0 - \sum_{i=1}^m z_i \cdot \sum_{i=1}^m x_i^0 z_i}{m \sum_{i=1}^m z_i^2 - (\sum_{i=1}^m z_i)^2} \end{cases} \quad (12)$$

式中 m 为参与直线拟合的特征点数。进一步做分段直线拟合,比较各直线段的斜率可以得到拐点 B 的坐标 (x_2, z_2) 。

建立圆心约束条件的数学模型后,需要选取圆弧上的特征点作为拟合的数据源,由于圆弧端点 A, B 的坐标值 x_1, x_2, z_2 已经得到,只需计算点 A 的 Z 坐标 z_1 。在实际问题中,将圆弧 AB 的理论半径 R' ,即 R 的标准值代入式(1)计算点 A 的 Z 坐标

$$z_1 = z'_0 = z_2 + \sqrt{R'^2 - (R' - (x_2 - x_1))^2} \quad (13)$$

利用轮廓线上点 $A(x_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, z_2)$ 之间的特征点拟合最小二乘圆,并将 A, B 点的坐标值 x_1, x_2, z_2 代入式(8)作为拟合约束条件。

5 比较实验

比较实验在本实验室自行研发设计的 GP-MI-1 型通用回转体智能检测仪上进行,如图 7 所示。测量机的单次测量误差 $\Delta = \pm 3 \mu\text{m}$, 回转体工件短圆弧半径的理论值为 10 mm, 公差范围 $\pm 0.25 \text{ mm}$ 。

分别采用最小二乘拟合圆法和圆心约束的最小二乘法计算圆弧半径。前者由于重复性和再现性太差无法满足测量需要,如表 1 所示;后者的测量原始数据和利用测量系统分析(MSA)方法^[11]



图 7 GP-MI-1 通用回转体智能检测仪

Fig. 7 GP-MI-1: General Precision Measuring Instrument

分析其重复性和再现性的结果分别如表 2、表 3 所示。

表 1 最小二乘法与圆心约束最小二乘圆拟合法测量数据对比(单位:mm)

Tab. 1 Comparison of measuring data by least-square method & centre-constraint least-square circle fitting method (Unit: mm)

测量次数	最小二乘法		圆心约束最小二乘圆拟合法	
	圆心坐标	半径	圆心坐标	半径
1	(3.387, -225.700)	10.003	(3.382, -225.679)	10.019
2	(3.478, -225.667)	10.097	(3.385, -225.686)	10.021
3	(3.502, -225.623)	10.192	(3.383, -225.684)	10.018
4	(3.398, -225.683)	10.055	(3.384, -225.683)	10.021
5	(3.509, -225.644)	10.084	(3.385, -225.687)	10.018
6	(3.398, -225.696)	10.013	(3.384, -225.679)	10.021
7	(3.382, -225.610)	10.108	(3.387, -225.686)	10.019
8	(3.334, -225.718)	9.976	(3.386, -225.683)	10.018
9	(3.506, -225.648)	10.130	(3.383, -225.682)	10.019
10	(3.354, -225.705)	9.998	(3.384, -225.681)	10.020

表 2 圆心约束最小二乘圆拟合法测量原始数据(单位:mm)

Tab. 2 Original data obtained by centre-constraint least-square circle fitting method (Unit: mm)

评价人/ 测量次数	零件编号										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A	1	10.013	10.017	10.019	10.014	10.019	10.005	9.995	10.002	9.996	9.999
	2	10.013	10.019	10.018	10.014	10.019	10.005	9.998	10	9.997	9.998
	3	10.013	10.018	10.018	10.014	10.021	10.006	9.998	10.002	9.997	9.995
	平均值	10.013	10.018	10.018	10.014	10.020	10.005	9.997	10.001	9.997	9.997
极差	0	0.002	0.001	0	0.002	0.001	0.003	0.002	0.001	0.004	
B	1	10.015	10.016	10.019	10.015	10.021	10.012	9.997	10.002	9.996	9.994
	2	10.016	10.018	10.019	10.016	10.019	10.013	9.998	10	9.997	9.996
	3	10.017	10.018	10.018	10.016	10.019	10.009	9.997	10.001	9.996	9.995
	平均值	10.016	10.017	10.019	10.016	10.020	10.011	9.997	10.001	9.996	9.995
极差	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.004	0.001	0.002	0.001	0.002	
C	1	10.013	10.02	10.019	10.014	10.022	10.019	9.993	10.005	9.997	9.997
	2	10.015	10.019	10.022	10.016	10.022	10.009	9.993	10.005	9.997	9.998
	3	10.012	10.019	10.02	10.014	10.023	10.009	9.994	10.003	9.999	9.996
	平均值	10.013	10.019	10.020	10.015	10.022	10.012	9.993	10.004	9.998	9.997
极差	0.003	0.001	0.003	0.002	0.001	0.01	0.001	0.002	0.002	0.002	
零件均值	10.014	10.018	10.019	10.015	10.021	10.010	9.996	10.002	9.997	9.997	

表 3 圆心约束最小二乘圆拟合法测量单元分析及总变差(单位:mm)

Tab. 3 Measuring cell analysis and total variations of centre-constraint least-square circle fitting method (Unit: mm)

评价项目	重复性—设备变差 (EV)	再现性—评价人变差 (AV)	重复性和再现性 (GRR)	工件变差 (PV)	总变差 (TV)
结果	0.001 2	0.000 7	0.001 4	0.007 8	0.007 9

MSA 根据重复性和再现性占总变差的百分比 %GRR 和分级数 ndc 来判断测量系统的重复性和再现性是否可以接受,具体标准有如下两条^[12]。

(1) %GRR 决定准则:

%GRR < 10% 时,测量系统可接受;

%GRR 在 10% ~ 30% 时,要权衡应用的重要性、量具成本、维修费用等是否考虑可以接受;

%GRR > 30% 时,测量系统不能接受,应努力找出问题所在,并加以纠正,然后再进行测量系统分析。

(2) 分级数 ndc 决定准则

ndc 应该大于或等于 5,即 $ndc \geq 5$ 。ndc ≥ 5 说明该测量系统有足够的分辨力。

根据测量数据分析报告的结果,

$$\begin{cases} \%GRR = GRR/TV = 17.631\% < 30\% \\ ndc = 1.41(PV/GRR) = 7.872 > 5 \end{cases}, \quad (14)$$

考虑到被测工件短圆弧半径在公差带范围内的分布相对比较集中,该方法是可以接受的。

6 结 论

在圆弧测量中,圆弧圆心及半径的测量误差的传递因数随着中心角的减小而增大。采用最小二乘圆拟合法对短圆弧进行测量存在一定局限性。短圆弧的功能特性和加工工艺往往将圆心作为固定值,在此基础上本文提出并验证了一种基于圆心约束最小二乘圆拟合的短圆弧测量方法。实验证明:利用本文的方法测量中心角为 20°,理论半径为 10 mm 的短圆弧,测量误差 < 0.01 mm。与传统的短圆弧测量方法比较,本文方法具有精度高、速度快、测量范围大、能对工件作在线非接触测量等优势。本文举出的实例在短圆弧测量中是常见而非唯一的,在实际运用中,可根据具体情况建立约束条件的数学模型。

参考文献:

[1] 陈甚伟. 三坐标测量短圆弧和短直线[J]. 机械工人, 2002,93(6):57-58.
CHEN SH W. 3-Coordinates measurement of short arc and short line[J]. *Machinist metal Cutting*, 2002,93(6):57-58. (in Chinese)

[2] 孟苏飞,樊曙天. 非完整圆弧半径测量方法综述[J]. 机械管理开发, 2006,93(6):51-54.
MENG S F, FAN SH T. A survey of incomplete arc radius measurement [J]. *Mechanical Management and Development*, 2006, 93 (6): 51-54. (in Chinese)

[3] 吴国栋,韩冰,何煦. 精密测角法的线阵 CCD 相机几何参数实验室标定方法[J]. 光学精密工程, 2007,15(10):1628-1632.
WU G D, HAN B, HE X. Calibration of geometric parameters of line-array CCD camera based on exact measuring angle in lab[J]. *Opt. Precision Eng.*,

2007,15(10):1628-1632. (in Chinese)

[4] 张国雄. 三坐标测量机[M]. 天津:天津大学出版社, 1999.
ZHANG G X. *Coordinate Measuring Machine* [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1999. (in Chinese)

[5] 刘珂,周富强,张广军. 半径约束最小二乘圆拟合方法及其误差分析[J]. 光子·激光, 2006,17(5):604-607.
LIU K, ZHOU F Q, ZHANG G J. Radius constraint least-square circle fitting method and error analysis[J]. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 2006,17(5):604-607. (in Chinese)

[6] 张振友,李明,金钢,等. 精密坐标测量中小段圆弧的一种评价方法[J]. 机械制造, 2008,46(522):63-66.
ZHANG Z Y, LI M, JIN G, et al.. Evaluating method of small circular arc in precision coordinate measurement[J]. *Machinery*, 2008, 46 (522): 63-66. (in Chinese)

- [7] GANDER W, GOLUB G H, STREBEL R. Least-square fitting of Circles and Ellipses [J]. *BIT*, 1994, 34(4): 558-578.
- [8] 王伟, 赵辉, 陶卫. 自动瞄准系统中直线测量方法的研究与改进[J]. *自动化仪表*, 2006, 27(5): 33-39.
WANG W, ZHAO H, TAO W. Research and improvement of linear measurement method for automatic aiming system [J]. *Process Automation Instrumentation*, 2006, 27(5): 33-39. (in Chinese)
- [9] 黄富贵, 崔长彩. 评定直线度误差的最小二乘法与最小包容区域法精度之比较[J]. *光学 精密工程*, 2007, 15(6): 889-893.
HUANG F G, CUI CH C. Comparison of evaluating precision of straightness error between least square method and least envelope zone method [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(6): 889-893. (in Chinese)
- [10] CUI C C, YE D, HUANG Q CH, *et al.*. Precise computation of planar straightness error using genetic algorithm [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2003, 11(4): 374-378.
- [11] 吴遵高. 测量系统分析 [M]. 北京: 中国标准出版社, 2004.
WU Z G. *Measurement System Analysis* [M]. Beijing: Standard Press of China, 2004. (in Chinese)
- [12] 董双财. 测量系统分析—理论、方法和应用 [M]. 北京: 中国计量出版社, 2006.
DONG SH C. *Measurement System Analysis: Theory, Method and Applications* [M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 2006. (in Chinese)

作者简介:



朱 嘉(1982—),男,重庆人,博士研究生,主要从事数字图像处理、测试计量技术及仪器等方面的研究。E-mail: s.1415926@gmail.com



向红标(1982—),男,重庆人,博士研究生,主要从事控制技术、测试计量技术及仪器等方面的研究。E-mail: buwubuliu@gmail.com

导师简介:



李醒飞(1966—),男,教授,博士生导师,主要从事多传感器融合技术、测试计量技术及仪器等方面的研究。E-mail: lixf@tju.edu.cn



陈 诚(1980—),男,甘肃人,博士研究生,主要从事机械设计、测试计量技术及仪器等方面的研究。E-mail: cccoooll@gmail.com



谭文斌(1984—),男,湖南人,博士研究生,主要从事控制技术、测试计量技术及仪器等方面的研究。E-mail: twb@tju.edu.cn